近視眼的安定性と先見的安定性

著者	大阿久　博
著者（英）	Oaku Hiroshi
雑誌名	武蔵野大学政治経済研究所年報
号	19
ページ	155-189
発行年	2020-02-29
URL	http://id.nii.ac.jp/1419/00001159/

近視眼的安定性と先見的安定性

大阿久　　博

1. 序

現代の複雑化する経済社会を考える上で、ネットワーク分析の重要性が急速に高まってきたのは明らかであろう。従来の経済学では多数の売り手・買い手が市場において遭遇し、取引を行うような状況を考えてきた。しかし実際には、様々な情報、財やサービス、就業の機会等のやり取りは、取引者同士のある種の社会的関係―ネットワーク―の下で行われていることが多い。そうしたことから、経済主体間の関係を表すネットワークの分析が不可欠のものとなってきていると思われる。本稿では、近年急速に進んできたこうしたネットワークについての研究を整理し、今後の課題、研究方向を検討する。ネットワークの分析においては、通常、グラフ理論が利用される。グラフの頂点が消費者や企業等のプレイヤーを表し、リンクによって結ばれたプレイヤー間で財・サービスあるいは情報等のやり取りが行われると想定する。このように設定することで多くの状況に応用できるモデルが構築できる。

ネットワークは非常に複雑で、その形成過程を研究する上で重要となるのは、ネットワークの安定性である。安定性を持つネットワークには、いかなるプレイヤー（これは単一のプレイヤーの場合も、あるグループとしての場合も含まれる）も、当該ネットワークを変更することにより、つまり新たにリンクを増設するあるいは削除することで、利得を増加させることはできないという条件が必要となるであろう。こうした条件で最も基本

となるものの一つが Jackson and Wolinsky（1996）によるペアワイズ安定性である。これはネットワーク上で、任意のプレイヤーのペアが同意してリンクを形成する、あるいは単独のプレイヤーがリンクを切断することで利得の増加を図る状況において、もはやどのペアもあるいはどのプレイヤーもリンクの増設・削除を行っても利得の増加は望めない状況である。

このとき、プレイヤーがリンクの増減の意思決定を行う際には、いくつかの異なる設定が考えられる。まず、近視眼的に意思決定を行うか、先見的に行うかである。近視眼的な意思決定は、プレイヤーが現在のネットワークの状況に対する最適な行動をとり、自分達の行動に対して他のプレイヤーがどのように反応するかは考慮しない naive な意思決定方法である。一方、先見的な意思決定では、他のプレイヤーの反応も考慮した上で、現在の行動を決める。先見的な場合では、どれだけ先を見通すかも問題となる。

また、プレイヤー達がリンクの増設・削減によってネットワークの変更を行う際にしても、単一のプレイヤーでそれが可能な場合、ペア、つまり 2 人の合意が必要という設定、あるいは 3 人以上の提携によってネットワークの変更を試みるという設定等々、分析する対象に応じて様々な形態が考えられる。

以下、本稿は次のように構成される。まず第 2 節で基本となるモデルの定義を与える。第 3 節では、近視眼的な行動に基づくネットワークの変化を見るが、そこではリンクの増設は 2 人のペアの合意により、リンクの削除は単独プレイヤーによって可能なネットワーク形成ルール（Jackson and Wolinsky ルール）の下での行動を考える。続く第 4 節ではプレイヤーの先見的な行動を扱う。ここでも Jackson and Wolinsky ルールに従ったプレイヤーの行動を検討する。第 5 節では、より一般的なプレイヤー間の提携の下での行動を検討する。最後に今後の研究の方向について考える。

2. モデル

n 人のプレイヤーからなるネットワークを考えることとする。このプレイヤーの集合を $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ とする[1]。プレイヤー間で形成されるネットワークは、数学のグラフ理論で使われる**グラフ**で表現される。まず、プレイヤーはグラフの**頂点**として表される。

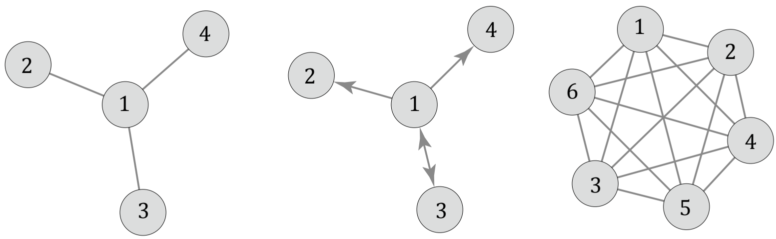
各プレイヤー達は何らかの形で結びつき、商品や情報のやり取りが行われるが、そうした関係にあるプレイヤーたち（グラフの各頂点）はグラフの**リンク**で結ばれるとする。

2 人のプレイヤーがリンクで結ばれ、情報交換等を行う場合に 2 つの形態が考えられる。一つはリンクの一方のプレイヤーのみが情報を得られ、他方は得られないという一方向に情報が流れる場合、もう一つはリンクで結ばれた両者が情報を得られるという場合である。前者のような状況を表すグラフを**有向グラフ**といい、後者を**無向グラフ**という。

2 人のプレイヤー $i \in N$ と $j \in N$ のリンクを ij と記す。これはプレイヤー i と j が**直接的に**結ばれていることを表している。以下では当初、無向グラフを考える。したがってプレイヤー i と j のリンクは ij と書いても ji と書いても良い。有向グラフの場合は ij と ji は反対の向きを持った別のリンクである。

ネットワーク g はこうした互いにリンクで結ばれたプレイヤーのペアのリストとして表現できる。i と j がリンクで結ばれているなら $ij \in g$ である。i と j が直接結ばれていないのであれば $ij \notin g$ と表す。ただし、i と j が直接結ばれていなくても、間接的に結ばれることもありうることに注意する。

例えば、4 人のプレイヤーからなるネットワーク g が次の図 1（a)（無向グラフ）のようになる場合を考えよう。



（a）無向グラフ　　（b）有向グラフ　　（c）完全グラフ

図１　ネットワークの例

図１（a）は $g=\{12, 13, 14\}$ と表現できるが、プレイヤー１と２は直接リンクで結ばれているので $12 \in g$ である。一方プレイヤー２と３の間には直接的に両者を結ぶリンク 23 は存在しないので $23 \notin g$ である。しかし頂点２と３はリンク 21 と 13 によって間接的に結ばれている。また、前述の有向グラフは図１（b）のようにリンクに矢印を付け情報等の流れを表現する。（b）では、１から２、１から３、１から４、さらに３から１への流れが表されている。

また、プレイヤー集合が N のとき、可能なすべてのリンクを持つネットワークを**完全ネットワーク**と呼び g^N と表す。図１（c）は６人のプレイヤーからなる（無向）完全ネットワークであり、

$$g^N=\{12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}$$

である。

またすべてのネットワークからなる集合を $\mathbb{G}$ とする。つまり、$\mathbb{G}=\{g \mid g \subseteq g^N\}$ と記す。プレイヤー集合 N が有限集合であるから、$\mathbb{G}$ も有限集合である。

ネットワーク g について少なくとも１つのリンクを持つ頂点の集合を

$$N(g)=\{i \mid \exists j,\ ij \in g\}$$

とする。プレイヤー i_1 と i_k の間に、$\{i_1 i_2, i_2 i_3, \ldots, i_{k-1} i_k\} \subseteq g$ となるようなリンクが存在するときプレイヤー i_1 と i_k の間に**間接リンク**が存在すると

いう。

また、ネットワーク g においてプレイヤー i のリンクの集合を $L_i(g)=\{ij \mid \exists j,\ ij\in g\}$ で表す。先の図 1（a）では、

$$L_2(g)=12$$

である。以下ではネットワーク g で $ij\notin g$ のとき、新たにリンク ij を加えることを $g+ij$、逆に $ij\in g$ のときこのリンクを削除したときのネットワークを $g-ij$ と記す。

あるネットワーク g について部分集合 $h\subset g$ が、

1. 任意の $i\in N(h)$ と $j\in N(h)$ について、$i\neq j$ ならば i と j を結ぶ直接あるいは間接リンクが存在する。
2. 任意の $i\in N(h)$ と $j\in N(g)$ について、$ij\in g$ ならば $ij\in h$ である。

を満たす場合、部分集合 h は g の**連結成分**であるという。g の連結成分の集合を $C(g)$ とすると、

$g=\cup_{\{h\in C(g)\}}h$ である。特にリンクを持たない頂点（**孤立点**と呼ぶ）は 1 点からなる連結成分である。

2.1　価値関数

ネットワークの持つ価値は、当該ネットワークの頂点やリンクの構成によって決定する。ネットワーク g に対して、その価値を表す関数 $v: G\to \mathbb{R}$ を価値関数という。$v(\emptyset)=0$ とし、可能なすべての価値関数の集合を V とする。

価値関数としてよく用いられるのが、

$$v(g)=\sum_{h\in C(g)} v(h),\ \ \forall g\in \mathbb{G}$$

を満たすものであり、**連結成分に関して加法的**であるという。これはネットワーク g の価値は、g を構成する各連結成分の価値を合計したものになるということである。この価値関数においては、ある連結成分のネット

ワーク構造が変化し、その他の連結成分ネットワークの構造には変化がない場合、当該連結成分に属するプレイヤーの利得は変化しうるが、他の連結成分の価値には影響を及ばさない。つまり連結成分ネットワーク間では外部性は働かないのである。

また、プレイヤーの名前を変更する関数として、$\pi:N\rightarrow N$ を考える（N の順列）。例えば、プレイヤー i と j の名前が入れ替わるのならば $\pi(i)=j$、$\pi(j)=i$ となる。この関数 π を使って、$g\in G$ から新しいネットワーク $g^{\pi}=\{\pi(i)\pi(j)\,|\,ij\in g\}$ が形成される。

価値関数が、$v(g^{\pi})=v(g)$ を満たすとき、**匿名的**であるという。匿名的な価値関数の下では、ネットワークの構造で当該ネットワークの有する価値が決定し、どのプレイヤーがどのポジションにいるかは価値に影響を及ばさない。

2.2　配分ルール

ネットワークの価値は上述の価値関数によって表現される。その価値はネットワークに属する各プレイヤーに配分されるが、その配分がどのようになされるかを表す、つまりすべての g と v に対して、$\sum_{i\in N}Y_i\,(g,\,v)=v(g)$ となる関数

$$Y{:}\,\mathbb{G}\times\,V\rightarrow\,\mathbb{R}^n$$

を**配分ルール**と呼ぶ。各 $i\in g$ に対する $Y_i(g,\,v)$ は、ネットワーク g においてプレイヤー i が得る利得である。一般には配分ルールは考察するケースに合わせていろいろな形で存在しうるが、特定の性質を持つものが利用されることが多い。

まず、連結成分に対して加法的な価値関数 $v\in V$ と $h\in C(g)$ について、

$$\sum_{i\in N(h)}Y_i\,(g,\,v)=v(h)$$

ならば、**連結成分に対してバランスしている**という。

また、$v \in V$と順列の関数πについて、v^{π}をv^{π}（g^{π}）$= v(g)$となる価値関数とし、

$$Y_{\pi(i)}\,(g^{\pi},\ v^{\pi}) = Y_i\,(g, v)$$

ならば配分ルールYは**匿名的**であるという。匿名的な配分ルールのもとではすべてのプレイヤーが対称的に扱われる。

3. 近視眼的安定性

次にネットワークが安定的であるにはどのような条件が必要かを考えよう。一般にあるネットワークから別のネットワークへの変化は、プレイヤー間でリンクが変更される—新たにリンクが形成されたり、既存のリンクが削除されたりする—ことによる。

リンクの増設、削除は次のルール（**Jackson-Wolinsky ルール**と呼ぶ）に従って行われるとする。

1. プレイヤーiからjへ新たにリンクを繋ぐには両者の同意が必要。
2. プレイヤーiとjを結ぶリンクを削除するには、プレイヤーiかj、どちらか一方の意思で行うことができる。
3. ネットワークgからg'（ただし$g \neq g'$）へネットワークが変わるなら、あるijについて、$g' = g + ij$であるか、$g' = g - ij$のどちらかである。

最後の条件は、1度のプレイでリンクの増設あるいは削除は1本だけということである。したがってネットワークgとg'との差はリンク一本ということになるが、こうした状況をgとg'は**隣接**しているという[2]。

次の安定性の条件はJackson and Wolinsky（1996）による。

定義1

配分ルールY、価値関数vが与えられたとき、ネットワーク$g \in \mathbb{G}$が次の条件を満たすとき**ペアワイズ安定ネットワーク**という。

(1) すべての $ij\in g$ に対して、$Y_i(g,v)\geq Y_i(g-ij,v)$ かつ $Y_j(g,v)\geq Y_j(g-ij,v)$
(2) すべての $ij\notin g$ に対して、$Y_i(g,v)<Y_i(g+ij,v)$ ならば $Y_j(g,v)>Y_j(g+ij,v)$

先のリンク形成ルールと合わせて考えるとペアワイズ安定性を満たすネットワークは、(1) はどのプレイヤーもリンクを削除するインセンティブを持たないことを意味し、また (2) はどちらか一方のプレイヤーがリンクの増設を望んでも、もう一方のプレイヤーはそれを望まないという状況である。このペアワイズ安定性の定義では最大でも 2 人のプレイヤーによるネットワークの変更を考えており、安定性に要求される条件としてはもっとも弱いものの一つである[3]。

定義 2

次の条件のどちらかを満たすときネットワーク g' は g を**支配する**という。

(1) ある $ij\in g$ ついて $g'=g-ij$ であるとき、

$$Y_i(g',v)>Y_i(g,v) \text{ あるいは } Y_j(g',v)>Y_j(g,v)$$

(2) ある $ij\notin g$ について $g'=g+ij$ であるとき、

$$\big(Y_i(g',v),\ Y_j(g',v)\big)>(Y_i(g,v),Y_j(g,v)).$$

この定義 2 を使うと、ペワイズ安定性は次のように言い換えられる。

定義 3

ネットワーク $g\in G$ がいかなる他のネットワークにも支配されないとき**ペアワイズ安定**であるという。

4. 近視眼的ペアワイズ安定集合

4.1 近視眼的改善パス

Jackson and Watts (2002)、Herings, Mauleon and Vannetelbosch (2009) は、隣接するネットワークの列で、各ネットワークが直後のネットワークに支配されるものを考えた。

定義 4

ネットワーク $g \in \mathbb{G}$ から $g' \neq g$ への**近視眼的改善パス**は、有限のネットワークの列 $g_1, g_2, \ldots, g_h$（ただし $g_1 = g$、$g_h = g'$）で、任意の $k \in \{1, 2, \ldots, h\}$ について次のいずれかを満たすものである。

(i) ある ij について、

$Y_i(g_{k+1}, v) > Y_i(g_k, v)$ あるいは $Y_j(g_{k+1}, v) > Y_j(g_k, v)$ のとき $g_{k+1} = g_k - ij$、

(ii) ある ij について、

$Y_i(g_{k+1}, v) > Y_i(g_k, v)$ かつ $Y_j(g_{k+1}, v) \geq Y_j(g_k, v)$ のとき $g_{k+1} = g_k + ij$ である。

近視眼的改善パスは、定義 4 の (i) (ii) を満たすようにリンク ij が削除／増設され、g_k から隣接する g_{k+1} へネットワークが変更されることを意味する。このようなリンク ij を**近視眼的改善リンク**と呼ぼう。$g \in \mathbb{G}$ から $g' \neq g$ への近視眼的改善パスが存在するとき、$g \xrightarrow{M} g'$ と記す。また、$M(g) = \{g' \in \mathbb{G} \mid g \xrightarrow{M} g'\}$、つまり $M(g)$ を g から近視眼的改善パスにより**到達可能**なネットワークの集合とする。まず、次の事実が簡単にわかる。

命題 1

$g \in \mathbb{G}$ がペアワイズ安定ならば、$M(g) = \emptyset$ である。

証明. もしある $g \in \mathbb{G}$ について $M(g) \neq \emptyset$ であるなら、定義 4 より、

(i) ある ij について、

$Y_i(g - ij, v) > Y_i(g, v)$ あるいは $Y_j(g - ij, v) > Y_j(g, v)$、

(ii) ある ij について、

$Y_i(g + ij, v) > Y_i(g, v)$ かつ $Y_j(g + ij, v) \geq Y_j(g, v)$

のどちらかが成り立つ。したがって g は定義 2 より支配されることになり、g はペアワイズ安定ではない。

近視眼的改善パスが終点を持つならば、その終点 g について $M(g) = \emptyset$

であるから、終点 g はペアワイズ安定なネットワークになる。もしペアワイズ安定なネットワークが存在しないのならば、少なくとも1つの近視眼的改善パスのサイクル、つまり近視眼的改善パス $\{g_0, g_1, g_2, \dots, g_K\}$ で、ある $k \in \{0, 1, 2, \dots, K-1\}$ について、$g_k = g_K$ となるものが存在しなければならない。

例1　ペアワイズ安定ネットワークが存在しない例（Jackson and Watts (2002)）

4人のプレイヤー1, 2, 3, 4からなるネットワークを考える。プレイヤーの利得はネットワークのリンクの接続によって次の図2のようになるとする[4]。

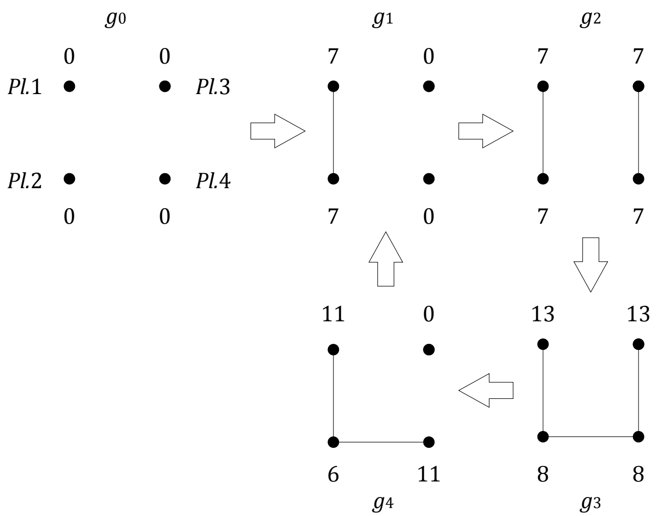


図2　ペアワイズ安定ネットワークが存在しないケース

例えば空のネットワーク g_0 から考えよう。g_0 ではプレイヤー1と2がリンクを結ぶインセンティブを持ち g_1 に至る。g_1 の状況では、プレイヤー3と4がリンクを結ぶインセンティブを持ち、g_2 に至る。g_2 では2

と 3 がリンクを結び g_3 に至る。g_3 ではプレイヤー 3 はリンク 34 を切るインセンティブを持ち、g_4 になる。g_4 ではプレイヤー 2 がリンク 23 を切るインセンティブを持ち g_1 に戻る。こうして $g_1 \to g_2 \to g_3 \to g_4 \to g_1$ というサイクルが生じる。この例ではどのネットワークも $M(g_i) \neq \emptyset$ $(i=0, 1, 2, 3, 4)$ であり、命題 1 よりペアワイズ安定ネットワークは存在しない。

4.2 近視眼的ペアワイズ安定集合

例 1 で見たように、ペアワイズ安定ネットワークは常に存在するとは限らない[5]。そのため Herings et al.（2009）は、ペアワイズ安定ネットワークの概念をネットワークの集合に対して適応した**近視眼的ペアワイズ安定集合**（pairwise myopically stable set）の概念を導入した。

定義 5

ネットワークの集合 $G \subseteq \mathbb{G}$ は、以下の条件を満たすとき**近視眼的ペアワイズ安定集合**という。

（1）$\forall g \in G$ に対して、

(1a) $g-ij \notin G$ となる $\forall ij \in g$ について、

$$Y_i(g-ij, v) \leq Y_i(g, v) \text{ かつ } Y_j(g-ij, v) \leq Y_j(g, v),$$

(1b) $g+ij \notin G$ となる $\forall ij \notin g$ について、

$$\big(Y_i(g+ij, v), Y_j(g+ij, v)\big) = (Y_i(g, v), Y_j(g, v)) \text{ あるいは}$$
$$Y_i(g+ij, v) < Y_i(g, v) \text{ または } Y_j(g+ij, v) < Y_j(g, v),$$

(2) $\forall g' \in \mathbb{G} \backslash G, M(g') \cap g \neq \emptyset,$

(3) 条件（1）と（2）を満たす $G' \subsetneq G$ は存在しない。

この定義 5（1）は、リンクの増設／削除によるネットワーク集合 G から外部への離脱を抑制することを要求している。(2) は、G の外部のネットワークには必ず G に到達可能な近視眼的改善パスが存在することを要

求している。条件（3）は、近視眼的ペアワイズ安定集合は条件（1）(2) を満たす集合の中で最小のものであることを求めている[6]。Jackson and Watts（2002）で次の閉サイクルの概念が定義された[7]。

定義 6

ネットワークの集合 C において、$\forall g \in C$ と $\forall g' \in C \backslash g$ を結ぶ近視眼的改善パスが存在するとき C は**サイクル**という。また、$\forall g \in C$ について、$M(g) \cap (\mathbb{G} \backslash C) = \emptyset$ であるとき C は**閉サイクル**という。

この定義からネットワーク g がペアワイズ安定であるなら、$\{g\}$ は閉サイクルである。次の定理は唯一の近視眼的ペアワイズ安定集合が存在する条件を示している。

定理 1（Herings et al.（2009））

ネットワークの集合 G が一つの閉サイクルに属するネットワークで構成される場合、G は唯一の近視眼的ペアワイズ安定集合である。

5. 先見的安定集合

5.1 先見的ペアワイズ安定性（Pairwise farsightedly stability）

前節まではプレイヤーの行動は、近視眼的（myopic）なものであった。つまり、プレイヤーは現在のネットワークの状況だけに合わせて新たなリンクを張る、あるいは既存のリンクを切るという決定を下し、そうした決定に対して他のプレイヤーたちがどのように反応するかについては考察の対象外であった。例えば、ネットワークに参加しているプレイヤーの数が非常に多い状況などでは各々のプレイヤーは他のプレイヤーの行動について限られた情報しか得ることができず、その下で意思決定行わざるを得ない。こうした状況においては近視眼的な行動も正当化されるであろう。

しかし状況が変われば、プレイヤー達が近視眼的な行動を取るという設

定は現実的でない場合も考えられる。ケースによっては自分の行動に対して他のプレイヤーがどう反応するかを計算に入れて先見的な行動をする状況も十分考えられる。

以下では、Herings et al（2009）に基づきプレイヤーが先見的な行動を行う場合のネットワークの安定的な状況について考察する。

定義 7

あるネットワーク $g \in \mathbb{G}$ から $g' \in G$ への**先見的改善パス**（farsightedly improving path）とは、ネットワークの有限個の列 $g_0, g_1, g_2, \dots g_h$（ただし $g_0 = g$, $g_h = g'$）で、任意の $k \in \{0, 1, 2, \dots, h-1\}$ について、次のどちらかが成り立つ場合をいう。

（1）$Y_i(g_h, v) > Y_i(g_k, v)$ あるいは $Y_j(g_h, v) > Y_j(g_k, v)$ のいずれかを満たす ij に対して $g_{k+1} = g_k - ij$、

（2）$Y_i(g_h, v) > Y_i(g_k, v)$ かつ $Y_j(g_h, v) \geq Y_j(g_k, v)$ を満たす ij に対して $g_{k+1} = g_k + ij$

この定義 6 では、各々隣接しているネットワークから成る列において、プレイヤーのあるペアにとって各々のネットワーク g_k と最終ネットワーク g_h を比較し、当該ペアの双方にとって現状以上に好ましい状況で、かつ少なくとも一方にとっては厳密に好ましい場合は新たなリンクが結ばれる、また、少なくともどちらか一方にとってリンクの削除が厳密に好ましいのであれば削除される状況を考えている。

したがって仮にあるプレイヤーのペアにとって、g_k と隣接する g_{k+1} を比較したときに双方にとって g_{k+1} の方が好ましいものではなかったとしても、ネットワーク列の最終の g_h が（定義 6 の（1）（2）の意味で）好ましいのであれば、g_k から g_{k+1} へのネットワーク変更は行われる。

g から g' への先見的改善パスが存在するとき $g \xrightarrow{F} g'$ とかき、

$$F(g) = \{g' \in \mathbb{G} \mid g \xrightarrow{F} g'\}$$

と定義する。$F(g)$ を g から（**先見的改善パスによる**）**到達可能集合**と呼ぶ。

この先見的改善パスの概念を用いて先見性を取り入れた場合のネットワーク集合の安定性が定義される。

定義 8

ネットワークの集合 $G \subseteq \mathbb{G}$ が所与の価値関数 v と配分ルール Y について**先見的ペアワイズ安定**であるとは、次の条件を満たすときをいう。

（1）任意の $g \in G$ について、

（1a）$g+ij \notin G$ なる任意の $ij \notin g$ に対して、
「$(Y_i(g', v), Y_j(g', v)) = (Y_i(g, v), Y_j(g, v))$」、あるいは
「$Y_i(g', v) < Y_i(g, v)$ あるいは $Y_j(g', v) < Y_j(g, v)$」を満たす
$g' \in G \cap F(g+ij)$ が存在する。

（1b）$g-ij \notin G$ なる任意の $ij \in g$ に対して、$Y_i(g', v) \leq Y_i(g, v)$ かつ
$Y_j(g'', v) \leq Y_j(g, v)$ を満たす $g', g'' \in G \cap F(g-ij)$ が存在する。

（2）任意の $g' \notin G$ に対して、ある $g \in G$ が存在し、$g \in F(g')$ とできる。

（3）（1）と（2）を満たす $G' \subsetneq G$ は存在しない。

上記の定義 7（1a）は、ネットワーク $g \in G$ に新たなリンク ij を加えて G の外部のネットワークに到達することは、$g' \in G$ によって抑制されるということを表している。（1b）はリンクを削除するときの同様な条件である。（2）は G の外部のどのネットワークからも G に到達可能な先見的改善パスがあるという条件である。（3）は、先見的ペアワイズ安定集合は以上のような条件を満たす最小の集合であるという条件である[8]。

例を使って近視眼的な場合の安定性と先見的な場合の安定性の違いを確認する。

例 2 （共著者モデル（Jackson and Wolinsky（1996）、Herings et al.（2009））

研究者からなるネットワークを考える。各研究者は論文を書くために時間を費やす。研究者をネットワークの頂点とし、もし二人の研究者が共同で論文を書く場合は二人を表す頂点がリンクで結ばれるとする。研究者 $i\,(i=1,2,3)$ が書く共著論文の数を n_i とする。このとき研究者 i の利得は $n_i>0$ ならば、

$$Y_i(g)=\sum_{j:ij\in g}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_in_j}\right)$$

であるとする。$n_i=0$ の場合は $Y_i(g)=0$ とする。

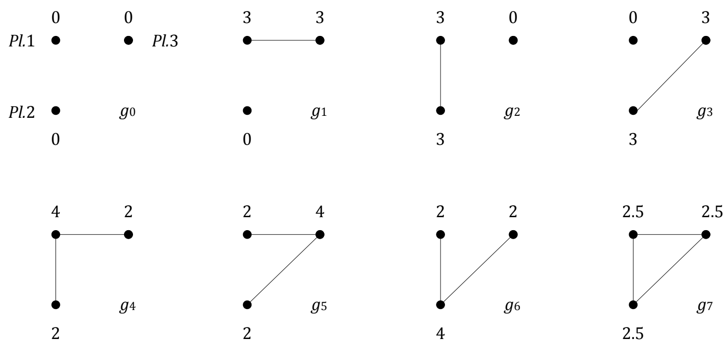


図 3　共著者モデル

図 3 は $n=3$ の場合である。ペアワイズ安定ネットワークは g_7 である。また、この例での近視眼的改善パスによる到達可能集合は、

$$M(g_0)=\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7\}$$
$$M(g_1)=\{g_4,g_5,g_7\}$$
$$M(g_2)=\{g_4,g_6,g_7\}$$
$$M(g_3)=\{g_5,g_6,g_7\}$$
$$M(g_4)=\{g_7\}$$

$$M(g_5) = \{g_7\}$$
$$M(g_6) = \{g_7\}$$
$$M(g_7) = \emptyset$$

となり、近視眼的ペアワイズ安定集合は $\{g_7\}$ である。

一方、先見的改善パスによる到達可能集合を見ると、

$$F(g_0) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$$
$$F(g_1) = \{g_4, g_5\}$$
$$F(g_2) = \{g_4, g_6\}$$
$$F(g_3) = \{g_5, g_6\}$$
$$F(g_4) = \{g_7\}$$
$$F(g_5) = \{g_7\}$$
$$F(g_6) = \{g_7\}$$
$$F(g_7) = \emptyset$$

であり、先見的ペアワイズ安定集合は $\{g_4, g_5, g_7\}$、$\{g_4, g_6, g_7\}$、$\{g_5, g_6, g_7\}$、$\{g_1, g_2, g_3, g_7\}$ の 4 つである。

この例 2 では先見性を導入すると、唯一のネットワークから成る安定集合はなくなる。つまり、他のどのネットワークから出発しても先見的改善パスで共通に行き着く一つのネットワークは存在しない。

先見的ペアワイズ安定集合を特徴づけた Herings et al.（2009）による一連の定理をあげる。

まず、$\mathbb{G}$ が先見的ペアワイズ安定集合の条件（1）（2）を満たすことは簡単にわかり、もし先見的ペアワイズ集合が存在しないのなら（3）を満たさない、つまり $\mathbb{G}$ の厳密な部分集合で（1）（2）を満たすものが無限に存在することになってしまうので $\mathbb{G}$ が有限個のネットワークしか有しないことに矛盾する。したがって、先見的ペアワイズ安定集合は必ず存在することがわかる。

定理 2

先見的ペアワイズ安定集合は存在する。

また次の定理は先見的ペアワイズ安定集合となる十分条件を示している。

定理 3

次の 2 つの条件を満たす G は先見的ペアワイズ安定集合である。

（i）外的安定性：すべての $g' \in \mathbb{G} \backslash G$ に対して、$F(g') \cap G \neq \emptyset$

（ii）内的安定性：すべての $g' \in G$ に対して、$F(g') \cap G = \emptyset$

定理 2 は外的安定性と内的安定性を満たすネットワークの集合は先見的ペアワイズ集合になることを示しているが、その逆は一般には成り立たない。前述の例 2 を見ると、先見的ペアワイズ安定集合 $\{g_4, g_5, g_7\}$ に対して、$F(g_4) = \{g_7\}$ であるから、$F(g_4) \cap \{g_4, g_5, g_7\} = \{g_7\} \neq \emptyset$ となる。先見的ペアワイズ安定集合になるための必要十分条件は 1 点からなる集合に注目すると得られる。

定理 4

一つのネットワークからなる集合 $\{g\}$ が先見的ペアワイズ安定集合になるための必要十分条件は、すべての $g' \in G \setminus \{g\}$ に対して $g \in F(g')$ が成り立つことである。

この定理 3 は、任意の $g' \in \mathbb{G} \setminus \{g\}$ から g へ到達可能な先見的改善パスがあれば、1 点集合 $\{g\}$ は先見的ペアワイズ安定になることを示している。

5.2　安定性と効率性

ネットワークを考える上で安定性と同様に重要なのが効率性である。ここでは安定なネットワーク（の集合）と効率性の関係をみる。

定義 9

ネットワーク g が他のすべてのネットワーク g' $(\neq g)$ に対して、

$$\sum_{i\in N} Y_i(g,v) \geq \sum_{i\in N} Y_i(g',v)$$

なるとき**効率的**（efficient）であるという。

これは、効率的なネットワークにおいては、当該ネットワークに属する全プレイヤーの利得の合計が最大化されているということである。

定義 10

ネットワーク g は、すべての $i\in N$ に対して $Y_i(g,v)\geq Y_i(g',v)$ であり、少なくとも一人のプレイヤーについて $Y_j(g,v)>Y_j(g',v)$ となるとき、g' を**パレート優越**するという。ネットワーク g をパレート優越するネットワークが存在しないとき、g は**パレート効率的**（Pareto efficient）であるという。

また、ネットワーク g が、$\forall g'\in \mathbb{G}\setminus\{g\}$ に対して、すべての $i\in N$ について $Y_i(g,v)>Y_i(g',v)$ なるとき、**強パレート優越的**であるという。

定義より、ネットワーク g が強パレート優越的であれば効率的である。また、単一のネットワークからなる先見的ペアワイズ安定集合と強パレート優越性には次の関係がる。

定理 5（Herings et al.（2009））

ネットワーク g が強パレート優越的であるとき、$\{g\}$ は唯一の先見的ペアワイズ安定集合である。

6. 他のルールによるモデル

これまでは近視眼的に、あるいは先見的に、プレイヤーのペアが合意して新たなリンクを増設する、あるいは単独のプレイヤーがリンクを削除できるというネットワーク形成ルール（Jackson－Wolonsky ルール）の下でどのようなネットワークの集合が安定とみなせるか等を議論してきた。

しかし、場合によっては、これまでのモデルでは適応できないケースも多々あろう。例えば、リンクの増設／削除が 2 人以上のプレイヤーの提携によって行われる場合や、一度に複数のリンクが変更される場合等がある。または、リンクが異なる 2 人のプレイヤーの順列であり、リンクに向きを付けたほうが適切な場合なども考えられる 。

6.1　複数プレイヤーの提携による離脱

ここでは 2 人以上のプレイヤーの提携によってネットワークの変更が行われる場合を考える。プレイヤーの提携を $S \subseteq N$ とする（ただし S は非空とする)。提携 S によって到達可能なネットワークを定義する。任意の S に対して g^S を S 上のすべてのネットワークとする。

定義 11

ネットワーク g' が g から提携 $S \subseteq N$ によって到達可能であるとは、以下の条件を満たす場合をいう。

(1) $ij \in g'$ かつ $ij \notin g$ であるならば、$\{i, j\} \subseteq S$

(2) $ij \notin g'$ かつ $ij \in g$ であるならば、$\{i, j\} \cap S \neq \emptyset$

この定義では、ネットワーク g においてリンクの増設が提携 S のメンバー間だけで行われる、あるいは切断されたリンクに接続していたメンバーの少なくともどちらか一方は提携 S のメンバーであるという条件を課している。

Jackson and van den Nouweland（2005）は、提携によってネットワークからの離脱が起きるときの安定性として、ペアワイズ安定性より強い概念である強安定性を導入した 。

定義 12

任意の提携 $S \subseteq N$ に対して、ネットワーク g' が g から S によって到達可能であり、$i \in S$ について $Y_i(g', v) > Y_i(g, v)$ であるならば、$Y_i(g', v) < Y_i(g, v)$ となる $j \in S$ が存在する場合、ネットワーク g は**強安定**（strongly stable）であるという[11]。

連結成分に関して加法的な価値関数 v が与えられた下で、各連結成分の価値をその連結成分に属するメンバーに均等に分け与える配分ルールを**成分ごとの均等配分ルール**（component-wise egalitarian rule）という。

また、価値関数 v がすべての $S \subseteq N$ に対して、

$\max_{g \in g^N} \frac{v(g)}{|N|} \geq \max_{g \in g^S} \frac{v(g)}{|S|}$ のとき、**top convex** であるという。

配分ルール Y が成分ごとに均等である場合、Jackson and van den Nouweland（2005）は次が成り立つことを示した。

定理 6

以下の命題は同値である。

（i）強安定ネットワークが存在する。

（ii）効率的ネットワークの集合は強安定ネットワークの集合に等しい。

（iii）価値関数 v は top convex である。

さらに Grandjean, Mauleon and Vannetelbosch（2011）では、価値関数 v が top convex であることと、効率的ネットワークの集合が唯一の先見的ペアワイズ安定集合に等しいことが同値であることが示されている。

6.2　形成されたネットワークから構成される有向ネットワーク

ここではPage, Wooders and Kamat（2005）、Page and Wooders（2009）によって導入されたネットワーク形成モデルを検討する。

プレイヤーの集合Nに対して$S \subseteq N$を提携とし、実行可能なネットワークの非空な集合$G \subseteq \mathbb{G}$を考える。プレイヤーiのG上での選好を**非反射的**な二項関係$\succ_i$で表す。もしiが$g' \in G$を$g \in G$より好むなら、$g' \succ_i g$と記す。非反射性からすべての$g \in G$に対して$g \nsucc_i g$である。

また、提携Sに属するすべてのプレイヤー$i \in S$について$g' \succ_i g$であるとき、提携Sはg'をgより好むとし、$g' \succ_S g$と書く。

プレイヤーiの選好は関数$u_i{:}G \to \mathbb{R}$を使って表現する。つまり、ネットワーク$g \in G$におけるプレイヤーiの利得を$u_i(g)$とし、

$$g' \succ_i g \Leftrightarrow u_i(g') > u_i(g)$$

とする[12]。

この定義から各プレイヤーの利得は、自身が直接あるいは間接的に結ばれているプレイヤーだけでなくネットワークg全体の状況から影響を受けることに注意する[13]。

同様に、提携Sについては、

$$g' \succ_S g \Leftrightarrow u_i(g') > u_i(g), \forall i \in S$$

とする。提携Sによってネットワーク$g \in G$が$g' \in G$に到達可能であるとき、$g \to_S g'$とかく[14]。

次にネットワーク集合G上の２つのタイプの「支配関係」を考える。２つのネットワーク$g, g' \in G$について、ある提携Sによって

$$g \to_S g' \text{かつ} g \prec_S g'$$

のとき、g'はgを**直接的に支配する**といい、$g' \rhd g$とかく。つまりある提携を組むことで、gからg'へ到達可能であり、その提携のメンバーは全員gよりg'の方を好むときにg'はgを直接的に支配するというのである。

２つのネットワーク$g, g' \in G$について、有限のネットワークの列、

$\{g_k\}_{k=0}^{h}=\{g_o, g_1, \ldots, g_h\}$（ただし $\forall k\in\{0, 1, ..., h\}$ について $g_k\in G$ であり、$g_0=g, g_h=g'$）と各ネットワークに付随する提携の列 $S_1, S_2, \ldots S_h$ が存在し、各 $k=1, 2, \ldots, h$ に対して、

$$g_{k\text{-}1} \to_{S_k} g_k \text{ かつ } g_{k\text{-}1} \prec_{S_k} g_h$$

のとき、g' は g を**間接的に支配する**といい、$g' \rhd\rhd g$ とかく。つまり、ネットワークの列の各段階 $(k=1, 2, ..., h)$ において、提携により直後のネットワークへの到達可能であり[15]、各段階のネットワーク g_k と比較して最終のネットワーク $g_h=g'$ は付随する提携のメンバー全員にとって好ましいとき、g' は g を**間接的に支配する**という（図4参照)。

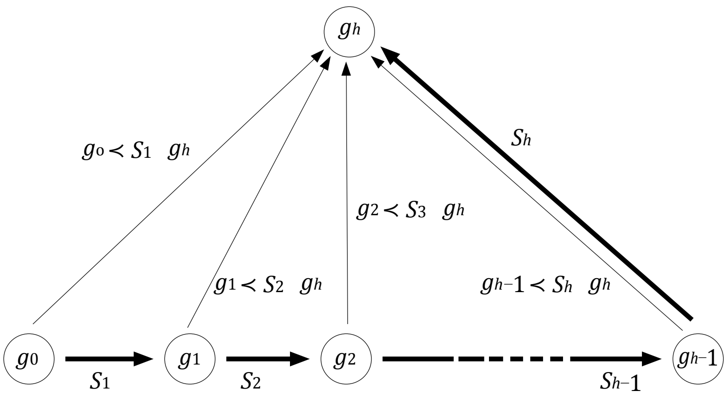


図4　間接的支配

したがって、仮に g_k は $g_{k\text{-}1}$ より（提携 S_k に属する誰かにとって）好ましいものでなかったしても、最終的な $g_h=g'$ がより好ましいものであれば、提携 S_k によって g_k への変更は行われる。これは第5節のプレイヤーのペアによる先見的改善パスの一般化になっている。

上記の直接的、間接的支配の概念より以下の**パス支配**の概念を定義する。いま、直接的、間接的支配のいずれかを $>$ で表すことにする。

ネットワーク $g, g'\in G$ について、

1．$g'=g$ であるか、

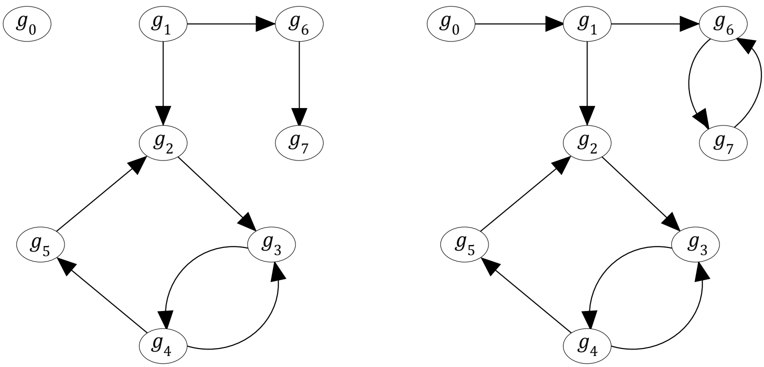
2. あるいは有限のネットワーク列 $\{g_k\}_{k=0}^{h}$（ただし $g_0=g, g_h=g'$）が存在し、$\forall k$ に対して、

$$g_k > g_{k\text{-}1}$$

が成り立つとき、$g'\in G$ は $g\in G$ を**パス支配する**といい、$g' \geq_p g$ とかく。

このときの有限のネットワーク列を**有限支配パス**（finite domination path)、また g から g' への有限支配パスが存在する場合、g' は g から**パス支配到達可能**であるという[16]。もし $g\in G$ が他のどのネットワークからもパス支配到達可能でなく、また逆に G のどのネットワークも g からパス支配到達可能でないとき、g は**孤立している**という。

パス支配到達可能性は各ネットワークを頂点とする有向グラフを使って表現する[17]。ここでの有向グラフは、ネットワークの集合 G と $E\subseteq G\times G$ のペア (G, E) となる。$E\subseteq G\times G$ は有向グラフの向きを持ったリンクを表し、ネットワーク g' が g からパス支配到達可能である、つまり $g'\geq_p g$ のとき、$(g, g')\in E$ である。今まで扱ってきたネットワーク（グラフ）は、頂点がプレイヤーで（無向）リンクはプレイヤー間の繋がりを表現していたが、パス支配到達可能性の有向グラフは、グラフの頂点はネットワークで、向きを持ったリンクはパス支配到達可能の方向を示していることに注意する。



(a)　　　　　　　　　(b)

図 5　パス支配関係（Page and Wooders（2009））

例えば図 5（a）と（b）は、ネットワークの集合 $\{g_k\}_{k=0}^{7}=\{g_0, g_1, \cdots, g_7\}$ とパス支配関係 $\geq_p$ の例を表している。(a) では、g_2 から g_3 へ矢印（向きを持ったリンク）が書かれているから $g_3 \geq_p g_2$ の関係があり、$(g_2, g_3) \in E$ である[18]。図 5（a）では二つのサイクル、$\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$ と $\{g_3, g_4\}$ が存在する。サイクル内のネットワークは互いにパス支配到達可能である。したがって例えば、$g_5 \geq_p g_2$ かつ $g_2 \geq_p g_5$ である。また g_0 は孤立している。図 5（b）は孤立点は存在しない。また、g_6 と g_7 も一つのサイクルになっている。

6.3　ネットワーク形成ゲームと安定性

ネットワークの集合とパス支配関係のペア $(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームと呼ぼう。$g_1 \geq_p g_0$ かつ $g_0 \geq_p g_1$ が成り立つとき、つまり、g_1 は g_0 からパス支配到達可能であり、g_0 も g_1 からパス支配到達可能であるとき、g_1 と g_0 は**同等**であるといい、$g_1 \equiv_p g_0$ とかく。$g_1 \equiv_p g_0$ のとき、g_1 と g_0 は同じものであるか、あるいは同じサイクル上にある。

もし $g_1 \geq_p g_0$ であり、かつ $g_1 \equiv_p g_0$ ではないならば、g_1 は g_0 の **descendant** であるといい、

$$g_1 >_p g_0$$

とかく。もし

$$g \geq_p g' \Longrightarrow g \equiv_p g'$$

であるならば、g' は **descendant を持たない**という。つまり、$g \geq_p g'$ であるなら､g と g' は同じものであるかあるいは同一のサイクル上にある場合、g' は descendent を持たないというのである。

次の定理は、G には descendant を持たないネットワークが必ず存在することを示している。

定理 7（Page and Wooders（2009））

$(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームとする。すべての $g \in G$ について、$g' \geq_p g$ かつ descendant を持たない g' が存在する。

定理 6 から任意のネットワーク形成ゲームにおいて descendant を持たないネットワークの集合は非空であることがわかったので、以下では descendant を持たないネットワークの集合を $\mathbb{Z}$ と表記する。

定義 12

$(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームとする。ネットワークの集合 $\mathbb{A} \subseteq G$ が次の 2 つを満たすとき**吸引領域**という。

（i）$\mathbb{A}$ に属するすべてのネットワークが互いに同等であり、$\mathbb{A}$ を真部分集合として持つ $\mathbb{A}'$ に対しては、$\mathbb{A}'$ に属するすべてのネットワークが同等になることはない 。

(ii) $\mathbb{A}$ に属するいかなるネットワークも descendant を持たない。

命題 2

ネットワーク形成ゲーム $(G, \geq_p)$ に 2 つの異なる吸引領域 $\mathbb{A}_1$ と $\mathbb{A}_2$ が存

在するとき、$\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \emptyset$ である。

証明. もし $g_0 \in (\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2)$ が存在するならば、$\forall g' \in A_1$、$\forall g'' \in A_2$ に対して、$g_0 \equiv_p g'$ かつ $g_0 \equiv_p g''$ であり、したがって $g' \equiv_p g''$ である。よって $\mathbb{A}_1$（あるいは $\mathbb{A}_2$）を真部分集合として含む $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2$ に属する要素はすべて同等になるが、これは定義 11（i）に矛盾する。

次の定理が示すように、descendant を持たないネットワークと吸引領域は非常に密接な関係を持っている。

定理 8（Page and Wooders（2009））

$(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームとし、$\mathbb{A}$ を G の部分集合とする。このとき次の 2 つは同値である。

（1）$\mathbb{A}$ は $(g, \geq_p)$ の吸引領域である。

（2）ある descendant を持たないネットワーク $g \in \mathbb{Z}$ が存在し、

$$\mathbb{A} = \{g' \in \mathbb{Z} \mid g' \equiv_p g\}$$

である。

定理 7、8 から任意のネットワーク形成ゲーム $(G, \geq_p)$ において、descendant を持たないネットワーク g が少なくとも 1 つは存在し、それを含む吸収領域が存在することがわかる。また、descendant を持たないネットワークは有限個でかつ命題 2 より、G は有限個の互いに素な吸引領域 $\{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m\}$ をもつことが了解される。ここで、各 $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して、ある $g \in \mathbb{Z}$ が存在して、$\mathbb{A}_k = \mathbb{A}^g \equiv \{g' \in \mathbb{Z} \mid g' \equiv_p g\}$ である[20]。

先程の図 5（a）では、

$$\mathbb{Z} = \{g_0, g_2, g_3, g_4, g_5, g_7\}$$

であったが、吸引領域は $\mathbb{A}_1 = \{g_0\}$, $\mathbb{A}_2 = \{g_2, g_3, g_4, g_5\}$, $\mathbb{A}_3 = \{g_7\}$ の 3 つになる[21]。

次にパス支配関係 $\geq_p$ についての安定性を定義する。

定義 13

$(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームとする。以下の 2 つの条件が満たされるとき $\mathbb{V} \subseteq G$ を $(G, \geq_p)$ の**パス支配安定集合**という。

（a）**内的安定性**（internal stability）：任意の $g_0, g_1 \in \mathbb{V}$ について（ただし $g_0 \neq g_1$）、$g_1 \geq_p g_0$ も $g_0 \geq_p g_1$ も成り立たない。

（b）**外的安定性**（external stability）：任意の $g_0 \notin \mathbb{V}$ に対して、$g_1 \geq_p g_0$ なる $g_1 \in \mathbb{V}$ が存在する。

定義 13 から、パス支配安定集合内の各ネットワークは互いにパス支配到達可能ではなく、外部からはパス支配到達可能なネットワークが $\mathbb{V}$ 内に少なくとも 1 つ存在するということである。

この定義より一点集合 $\{g\}$ がパス支配安定集合であるための必要十分条件は、任意の $g' \in G \setminus \{g\}$ 対して、$g \geq_p g'$ が成り立つことであることがわかる。

定理 9（Page and Wooders（2009））

$(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームとする。また、一般性を失うことなく $(G, \geq_p)$ は有限個の吸引領域の集合

$$\{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m\}$$

をもつ。

このとき、$\mathbb{V} \subseteq G$ が $(G, \geq_p)$ のパス支配安定集合になるための必要十分条件は、$\mathbb{V}$ が各吸引領域から取られた一つのネットワークから構成される、つまり各 $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して、

$\mathbb{V} = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$、ただし、$g_k \in \mathbb{A}_k$ である。

定理 9 より、各吸引領域 $\mathbb{A}_k$ に含まれるネットワークの数を $|\mathbb{A}_k|$ とすると、$(G, \geq_p)$ は、$|\mathbb{A}_1| \times |\mathbb{A}_2| \times \cdots \times |\mathbb{A}_m|$ 個のパス支配安定性集合を持ち、その各々のパス支配安定集合は m 個のネットワークからなることがわかる。

例 3（吸引領域）

定理 8 を図 5（a）に適応すると、パス支配安定集合は、

$$|\mathbb{A}_1|\times|\mathbb{A}_2|\times|\mathbb{A}_3| = 1\times4\times1 = 4$$

より 4 個ある。具体的には、次の 4 つである。

$$\mathbb{V}_1 = \{g_0, g_2, g_7\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{g_0, g_3, g_7\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{g_0, g_4, g_7\}$$

$$\mathbb{V}_4 = \{g_0, g_5, g_7\}$$

一方 (b) では $|\mathbb{A}_1| = 4$，$|\mathbb{A}_2| = 2$ であるので、パス支配安定集合は $4\times2 = 8$ ある。具体的には次の 8 つである。

$$\mathbb{V}_1 = \{g_2, g_6\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{g_3, g_6\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{g_4, g_6\}$$

$$\mathbb{V}_4 = \{g_5, g_6\}$$

$$\mathbb{V}_5 = \{g_2, g_7\}$$

$$\mathbb{V}_6 = \{g_3, g_7\}$$

$$\mathbb{V}_7 = \{g_4, g_7\}$$

$$\mathbb{V}_8 = \{g_5, g_7\}$$

パス支配安定集合にはサイクルに属するネットワークが含まれる。図 5（b）では $g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7$ がそれに相当する。それを排除するのが次のパス支配コア（path dominance core）である。

定義 14

ネットワーク $g \in G$ に対して、$g' \geq_p g$ なるネットワーク $g' \in G$（ただし $g' \neq g$）が存在しないとき、g は**パス支配コア**に属するという。パス支配コアを $\mathbb{C}\,(\subseteq G)$ で表す。

このパス支配コアに関して、非空になる必要十分条件、およびパス支配コアを構成するネットワークを具体的に求めたのが次の定理である。

定理 10（Page and Wooders（2009））

$(G, \geq_p)$ をネットワーク形成ゲームとする。また、一般性を失うことなく $(G, \geq_p)$ は吸引領域の集合 $\{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m\}$ を持つとする。各吸引領域に含まれるネットワークの数を $|\mathbb{A}_k|$ とする。このとき次の二つが成り立つ。

（1）$(G, \geq_p)$ は、唯一のネットワークからなる吸引領域が存在するとき、そしてそのときに限り、非空のパス支配コアを持つ。

（2）$\{\mathbb{A}_{k1}, \mathbb{A}_{k2}, \ldots, \mathbb{A}_{kn}\} \subseteq \{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m\}$ を、すべての吸引集合から濃度が 1 である吸引領域だけを取り出して作った集合とする。このときパス支配コアは、

$$\mathbb{C} = \{g_{k1}, g_{k2}, \cdots, g_{kn}\}$$

で与えられる。ここで $g_{k_i} \in \mathbb{A}_{k_i}$、i＝1, 2, ..., n である。

パス支配コアの特徴は、サイクルとなる吸引領域に属するネットワークは含まないことであるから、次の例のように吸引領域がすべてサイクルを形成する場合にはパス支配コアは存在しない。

例 4（吸引領域とパス支配コア）

定理 9 から、図 5（a）のパス支配コアは、$\mathbb{C} = \{g_0, g_7\}$ である。また図 5（b）では、吸引領域は、

$$\mathbb{A}_1 = \{g_2, g_3, g_4, g_5\},\quad \mathbb{A}_2 = \{g_6, g_7\}$$

の二つだが、どちらも $|\mathbb{A}_k| \neq 1$, k＝1, 2 であるので、定理 8 からパス支配コアは存在しない。

7. 結 び

経済学の分野でのネットワークの分析は、プレイヤーのネットワーク構造を所与とし、その構造に基づいて行われるプレイヤー間のゲームの結果を分析する場合と、プレイヤーたちのインセンティブに基づいてネットワーク自体が形成される過程を分析する場合とに分かれる[22]。

本稿では後者について得られている知見を整理した。初めに社会のネットワークを定義し、当該ネットワークに所属しているプレイヤー達が近視眼的な行動、つまり現在のネットワーク状況だけを考慮し最適反応を取る、その際に自分の行動が他のプレイヤーに与える影響は考えない、という行動を取る場合を想定した。そうした行動様式のもとでプレイヤーのペア単位での戦略の変更によって利得を改善していくネットワークの列—近視眼的改善パス—を定義した。さらにこの近視眼的改善パスを適応し、プレイヤーのペアによる戦略の変更が実施されないという意味での安定性—近視眼的ペアワイズ安定性—の概念を紹介した。近視眼的ペアワイズ安定集合は必ず存在する。

次に Herings et al.（2009）による、プレイヤー達が、自分の行動に対する他のプレイヤーの行動も考慮に入れて意思決定を行うという「先見性」を導入した場合を検討した。前節の近視眼的改善パスに先見性を導入した先見的改善パスが定義され、さらにこうした先見的な行動が取られる場合の安定なネットワークの集合—先見的ペアワイズ安定集合 --- が定義された。この安定集合では、(1) いかなるペアの当該集合からの離脱も利得の改善を生じさせない、(2) 当該集合外のネットワークよりもプレイヤーの利得を改善させるネットワークが当該集合内に存在する、(3) 当該集合はこの２つの条件を満たす真部分集合は持たない、という３つの条件が課される。先見的ペアワイズ安定集合も必ず存在することが知られている。

第５節までは、プレイヤーはペア単位でリンクの形成を行う Jackson and Wolinsky ルールの下でのネットワークからの離脱を考えたが、第６

節では Page et al.（2005，2009）によるペアだけではなくもっと一般のプレイヤーの提携に基づく離脱を考慮したネットワークの形成を検討した。ペア単位の離脱のみを考えた先見的改善パスを提携による離脱に拡張した支配パスの概念に拡張し、ネットワーク形成ゲームを定義した。支配パスの概念を使い、先見的ペアワイズ安定集合をプレイヤーの提携離脱の場合に拡張したパス支配安定集合を導入した。

「先見性」を導入してネットワークの推移を探ろうという研究は 2000 年代入ってから本格的に行われだしたが、まだ十分に進んではいない状況である。「先見性」をどうモデル化するか、例えばどの程度の先を見据えるか等々、分析する対象によって異なってくると思われる 。

「先見性」のモデル化が、ネットワーク形成の安定性と効率性の関係にどう影響するか、今後の重要な研究課題である。

参考文献

1　Bala, V. and S, Goyal（2000）, non-cooperative model of network formation. *Econometrica*, vol, 68, 1181-1230,

2　Bramoulle, Y and Kranton, R（2016）, Games played on networks, The Oxford Handbook of the economics of networks, OxfordUniv. Press, 83-112,

3　Calvo-Armengol, A. and Zenou, Y（2004）, Social Networks and Crime Decisions: The Role of Social Strucure in Facilitating Delinquent Behavior, I*nternational Economic Review*, vol,45, 939-958.

4　Chwe, M（1994）, Farsighted coalitional stability. *Journal of Economic theory*, vol,63, 299-325,

5　Duta, B and Mutuswani, S（1997）, Stable networks, *Journal of Economic Theory*, vol,76, 322-344,

6　Gilles, R, P,, and Sarange, S（2007）, Networks potentials. *Review of Economic Design*, vol,11, 13-52,

7　Galeotti, A, Goyal, S and Kamphorst, J（2006）, Link formation with heterogeous players, *Games and Economic Behavior*, 54, 353-372, 8 Goyal, S, (2007), *Connections*, Prinston Univ, Press,

9 Goyal, S and Vega-Redondo, F (2005), Network formation and social coordination, Games and Economic Behavior, 50, 178-207,

10 Goyal, S and Vega-Redondo, F (2007), Structural holes in social networks, *Journal of Economic Theory,* vol,137, 460-492.

11 Grandjean, G,, A, Mauleon and V, Vannetelbosch (2011), Connections among farsjghted agents, *Journal of Public Economic Theory*, vol,13, 935-955,

12 Herings, P, J, J, Mauleon, A,, and Vannetelbosch, V (2009), Farsightedly stable networks. *Games and Economic Behavior*, vol, 67, 526-541,

13 Herings, P, J, J, Mauleon, A,, and Vannetelbosch, V (2014), Stability of networks under Level-K farsightedness. *SSRN*

14 Jackson, M, O (2008), *Socil and Economic Networks*, Prinston, Univ, Press,

15 Jackson, M, O and A, van den Neuweland (2005), Strongly stable network. *Games and Economic Behavior*, vol,51, 420-444,

16 Jackson, M, O and Watts, A (2001), The existence of pairwise stable networks. *Seoul Journal of Economics*, vol,14, 299-321,

17 Jackson, M, O and Watts, A (2002), The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, vol,106, 265-295,

18 Jackson, M, O and A, Wolinsky (1996), A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Thoery*, vol,71, 44-74,

19 Mauleon, A and V, Vannetelbosch (2016), Network formation games. *The Oxford Handbook of the economics of networks*, OxfordUniv. Press, 168-190,

20 Page Jr, F, H,, Wooders, M, H (2009), Strategic basins of attraction, the path dominance core, and network formation games, *Games and Economic Behavior*, vol,66, 462-487.

21 Page Jr, F, H,, Wooders, M, H and S, Kamat (2005), Networks and farsighted stability. *Journal of Economic Theory*, vol,120, 257-269,

22 Vega-Redondo, F (2016), Links and actions in interplay, *The Oxford Handbook of the economics of networks*, OxfordUniv. Press, 191-214,

注

1　以下ではネットワークが様々な形に変化する場合を考えていくが、プレイヤーの集合自体は変化しないものとする。

2　この Jacson-Wolinsky ルール以外にもリンク形成ルールは様々な形のものを考えることができる。例えば、Jacson-Wolinsky ルールの 3 番目の条件を排除して一度に複数のリンクの増設・削除が可能なもの、プレイヤー全員の投票によってリンクの増設・削除を決定するもの等である。こうした例については Jackson-van den Nouweland（2005）、Jackson（2008）、Bala and Goyal（2000）、Goyal（2007）等を参照せよ。

3　これと類似した協力ゲームの提携を使った安定性の概念も Dutta and Mutuswani（1997）や Jackson and Nouweland（2005）によって提案されている（第 6 節参照）。

4　詳細は Jackson and Watts（2002）の Trading Example 参照。

5　ペアワイズ安定ネットワークが存在するには、近視眼的改善パスのサイクルが生じなければよいが、そのための条件として Gilles and Sarangi（2007）ではポテンシャル関数の存在が示されている。

6　$\mathbb{G}$ が（1）（2）を満たすことから（3）が必要となる。またこのことから近視眼的ペアワイズ安定集合は必ず存在することがわかる。

7　Jackson and Watts（2002）は、すべてのネットワークについて、g それ自身がペアワイズ安定になるか、$C \subseteq M(g)$ なる閉サイクルが存在するかのどちらかが成り立つことを証明した。また、Jackson and Watts（2001）ではサイクルを排除する配分ルールの条件を示している。

8　G は定義から（1）（2）を満たすことに注意。

9　リンクに向きが必要な場合は有向ネットワークで表されるが、有向ネットワークを使った分析には Bala and Goyal（2000）、Goyal（2007）、Goyal and Vega-Redondo（2005）、Galeotti er al.（2006）等がある。

10　プレイヤーのペアではなく、より多くのプレイヤーからなる提携によるネットワークの変化を最初に議論したのは Dutta and Mutuswami（1997）である。ただし、Dutta and Mutuswami（1997）の定義では、既存ネットワークからの離脱は提携のメンバーすべての利得が厳密に改善されなければ行われないが、Jackson and Nouweland（2005）では、一部のメンバーが厳密に改善されれば良いという強い設定になっている。

11 強安定性の定義は Dutta and Mutuswami（1997）で最初に提案された。ここでの強安定性の定義は Dutta and Mutuswami（1997）と若干異なる。後者は提携したすべてのプレイヤーの利得が厳密に増加する場合に、提携による離脱が起きると想定している。また、ネットワーク g がここでの定義で意味で強安定であれば、g はペアワイズ安定であることがわかる。

12 前節ではネットワーク g 上でプレイヤー i に配分される利得は $Y_i(g, v)$ であった。

13 つまり、ここでの設定では、プレイヤーの選好はネットワーク $g \in G$ に依存するので、g 内で直接的にリンクで結ばれているプレイヤーからはもちろん、間接的に結ばれているプレイヤー、あるいは間接的にさえ結ばれていないプレイヤーからも影響も受けることになる。この意味で外部性はかなり広範囲に渡っている。

14 ネットワークが変更される際のルールの例として、Jackson-van den Nouweland ルール、非協力ルール、$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ 投票ルール等がある。詳細は Page and Wooders（2009）参照。

15 $g_{k\text{-}1}$ から g_k への推移を**直後への到達**という。

16 もし g から g への有限支配パスが存在するときは、そのパスを**サイクル**と呼ぶ。

17 Page et al.（2005）では、このようなあるネットワークから提携による離脱によって変更可能なネットワークとプレイヤーの選好から変更可能なネットワークを定めるルールを組み合わせたネットワーク同士の推移の状況を表現する有向グラフを**スーパーネットワーク**と呼んでいる。

18 二項関係 $\geq_p$ が直接的支配関係であるとする、g_3 から g_4 への矢印は提携 S_4 のメンバーとって g_4 が g_3 より選好され、かつ提携 S_4 により g_3 から g_4 へネットワークを変更できることを意味している。また、同時に逆方向 g_4 から g_3 への矢印もあるので、S_4 とは異なる別の提携 S'、つまり $S_4 \cap S' = \emptyset$ なる S' によって g_3 が g_4 より選好され、かつ提携 S' によって g_4 から g_3 へネットワークを変更できる。

19 これは当該集合に属するネットワークが互いに同等であるという性質を持つ集合の中で最大のものであるということ。

20 もし $g' \equiv_p g$ であるなら、$\mathbb{A}^{g'} = \mathbb{A}^g$ である。また、ある $g \in G$ が孤立しているなら、定義からその g は吸引領域になり、$\mathbb{A}^g = \{g' \in \mathbb{Z} \mid g' \equiv_p g\} = \{g\}$ である。

21　特に $\mathbb{A}_2$ については、$\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}^{g_2} = \mathbb{A}^{g_3} = \mathbb{A}^{g_4} = \mathbb{A}^{g_5} = \{g^2, g^3, g^4, g^5\}$ である。

22　前者については Bramoulle, Y and Kranton, R（2016)、後者については Mauleon and Vannetelbosch（2016）が参考になる。また、この両者の統合は今後の研究の進展が望まれる分野である。Jackson and Watts（2002)、Goyal and Vega-Redondo（2005)、Goyal and Vega-Redondo（2007）等が先駆となる研究であり、Goyal（2007)、Vega-Redondo（2016）も参照せよ。

23　Herings et al.（2014）では、$K \geq 1$ について K 手先まで読む Level-K 先見性を定義し、異なる K の値での安定性を検討している。